Prof. Dr. Alfred Toth

Ein relationales Paradox

1. Da jede Menge in der Form einer Relation darstellbar ist und auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, kann man, wie dies bereits Bense (1975, S. 64 f.) für die Objekte des "ontischen Raumes" gezeigt hatte, Elemente von Mengen von 0-stellige Relationen einführen. Elemente sind ja immer Objekte, allerdings sind sie im Rahmen der Mathematik im Gegensatz zur Ontik bzw. Semiotik unter Absehung ihrer Qualitäten rein quantitativ definiert. Da die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist, ist folglich auch das Null-Objekt eine 0-stellige Relation.

2. Daß eine Relation 0-stellig ist, kann somit zweierlei bedeuten, erstens

$R^0 = \emptyset$

und zweitens

$R^0 \neq \emptyset$.

Daraus folgt als erste Merkwürdigkeit, daß 1-stellige Relationen nur 2-elementige Mengen sein können, also im ungeordneten Falle nur die Relation

$R^1 = (\emptyset, \neg\emptyset)$

in Frage kommt, und dies ist, wie man leicht erkennt, eine relationale Definition der logischen 2-Wertigkeit L = (0, 1), darin die unvermittelten Werte reflexionssymmetrisch sind (vgl. Toth 2015).

3. Danach sind also 2-stellige Relationen nur über 3-elementigen Mengen möglich, und hier gibt es nun erstmals neben der trivialen Relation

$R^2 = (0, 1, 2)$

die nicht-triviale Relation

$R^2 = (\emptyset, \neg\emptyset, \rightarrow)$, darin also das dritte Relatum kein Objekt, sondern eine Abbildung zwischen Objekten ist. Diese auffällige Eigenschaft ist eine der Wurzeln für die kategorietheoretische Fundierung der zunächst zahlentheoretisch und dann mengentheoretisch eingeführten Mathematik, oder wie es Mac Lane, einer der Begründer der Kategorietheorie ausgedrückt hatte: "Da eine Kategorie aus Pfeilen besteht, ließe sich unser Thema auch als Behandlung des Problems auffassen, wie man ohne Elemente auskommen und statt ihrer Pfeile benutzen kann" (1972, S. iii).

4. Ontisch gesehen ist diese Doppeldeutigkeit 2-stelliger Relationen von großer Bedeutung.

4.1. Als objektales Beispiel kann die Diskonnexivierung von Städten angeführt werden. Im Zuge der Pariser Vorortsverträge wurde 1920 etwa die ungarische Stadt Komárom zweigeteilt, wobei die Grenze mitten in die Donau gesetzt wurde. Der nördlich gelegene Teil gehört seither zur Slowakei und heißt Komárno

"Doppel-Stadt" Komárom (U) – Komárno (SL).

4.2. Als subjektales Beispiel kann jede zerbrochene Beziehung, d.h. Relation zwischen zwei Subjekten, die sich also getrennt haben, dienen.

Wesentlich ist also, daß bei der Doppeldeutigkeit 2-stelliger Relation die aus 2 Objekten und 1 Abbildung bestehende Relation nicht auf eine 3-, sondern auf eine 2-elementige Menge reduziert wird, d.h. wir haben ein relationales Paradox der folgenden Form

$(R^2)^{-1} = (\emptyset, \neg\emptyset, \rightarrow) = (\emptyset, \neg\emptyset)$

(und also eben nicht $(R^2)^{-1} = (0, 1, 2)$). Im Geiste Mac Lanes gesagt, bedeutet dies also sowohl im objektalen als auch im subjektalen Falle: "Der Pfeil verschwindet". Und verschwinden kann er, weil er im Gegensatz zu den Objekten, die er aufeinander abbildet, rein semiotische und also keinerlei ontische Relevanz hat: Die Zusammengehörigkeit von Doppelstädten ebenso wie diejenige von Menschen beruht auf reiner Konvention, d.h. es handelt sich in beiden Fällen um symbolische semiotische Abbildungen, und diese sind bekanntlich Null-Abbildungen, also "ontisch nicht vorhanden".

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Mac Lane, Saunders, Kategorien. Berlin 1972

Toth, Alfred, Die Logik des Jägers Gracchus. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

18.8.2015